数学通报

Shuxue Tongbao

全国初等/中等教育类核心期刊

2015.6

中国数学会·北京师范大学　主办

数学通报(月刊)

(1936年8月创刊)
刊名题字　郭沫若
2015年　第54卷　第6期
(6月30日出版)

主　　管:中国科学技术协会
主　　办:中国数学会
　　　　北京师范大学
编辑出版:《数学通报》编委会、编辑部
地址邮编:北京师范大学(100875)
电话传真:010—58807753
投稿网站:http://www.shxtb.com
E—mail:shxtb@bnu.edu.cn
排　　版:《数学通报》编辑部
印　　刷:河北天普润印刷厂
发　　行:北京报刊发行局
订　　购:全国各地邮局
代　　号:2—501

本期责任编辑　魏　炜

目　次

2248 若 a,b,c,λ 为非负实数,求证:

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\geqslant\frac{3\lambda^2}{4}(a+b+c)^2.$$

(江苏省常熟市中学 查正开 215500)

2249 已知半径为 1 的定圆$\odot P$的圆心 P 到定直线 l 的距离为 2,Q 是 l 上一动点,$\odot Q$ 与$\odot P$ 相外切,$\odot Q$ 交 l 于 M、N 两点,对于任意直径 MN,平面上恒有一定点 A,使得$\angle MAN$为定值,求$\angle MAN$的度数.

(四川省资阳市外国语实验学校 蔡勇全 641300)

2250 已知 n 为正整数,求证:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\cdots\sqrt{(n-1)+\sqrt{n}}}}}}<2.$$

(陕西延安育英中学 尚生陈 716000)

(上接第 51 页)

故设 $\sqrt{(am^2-b)^2+(cm)^2}=|am^2+b|$,

则 $c^2=4ab>0$,由距离公式

$$h=\frac{|(am^2-b)x_0+cmy_0+dm^2+em+f|}{|am^2+b|},$$

令 $y_0=-\dfrac{e}{c}$,

则 $h=\dfrac{|(ax_0+d)m^2+f-bx_0|}{|am^2+b|}$,

若要使 h 为常数,则有

$$(ax_0+d)b=a(f-bx_0),$$

解得 $x_0=\dfrac{af-bd}{2ab}$,$h=\left|\dfrac{af+bd}{2ab}\right|$,

所以,动直线总与定圆

$(x-\dfrac{af-bd}{2ab})^2+(y+\dfrac{e}{c})^2=(\dfrac{af+bd}{2ab})^2$ 相切,

猜想成立.于是有:

结论 2 若动直线$(am^2-b)x+cmy+dm^2+em+f=0$(其中 $ab>0$)满足 $c^2=4ab$,则它总与定圆$(x-\dfrac{af-bd}{2ab})^2+(y+\dfrac{e}{c})^2=(\dfrac{af+bd}{2ab})^2$ 相切.

3 结论拓展

回头看问题 2,动直线$(m^2-1)x+my+1=0$ 中 $a=b=c=1$,不满足 $c^2=4ab$,但只要把方程改写成$(m^2-1)x+2m\cdot\dfrac{y}{2}+1=0$,则 $c'=2$,满足 $c'^2=4ab$,若令 $y'=\dfrac{y}{2}$,则动直线转化为$(m^2-1)x+2my'+1=0$.由距离公式 $h=\dfrac{|(m^2-1)x_0+2my_0'+1|}{1+m^2}$,令 $x_0=\dfrac{1}{2}$,$y_0'=0$,得 $h=\dfrac{1}{2}$,即动直线与圆$(x-\dfrac{1}{2})^2+y'^2=\dfrac{1}{4}$相切,所以原动直线与椭圆$(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{1}{4}$相切.

上例说明,若 $c^2\neq4ab$,可变换得到 $c'^2=4ab$ 后使用直线与圆相切的距离公式.如此,我们再研究更一般性的情况,若动直线$(am^2-b)x+cmy+dm^2+em+f=0$(其中 $ab>0$)不满足 $c^2=4ab$,只需考虑 $c'=2\sqrt{ab}$,就可以把动直线的方程就转化为$(am^2-b)x+2\sqrt{ab}m\cdot\dfrac{cy}{2\sqrt{ab}}+dm^2+em+f=0$,若令 $y'=\dfrac{cy}{2\sqrt{ab}}$,则方程又转化为$(am^2-b)x+2\sqrt{ab}my'+dm^2+em+f=0$,根据结论 2,变换后的动直线与定圆$(x-\dfrac{af-bd}{2ab})^2+(y'+\dfrac{e}{2\sqrt{ab}})^2=(\dfrac{af+bd}{2ab})^2$ 相切,再将 $y'=\dfrac{cy}{2\sqrt{ab}}$ 代入圆的方程,就得到定椭圆$(x-\dfrac{af-bd}{2ab})^2+\dfrac{1}{4ab}(cy+e)^2=(\dfrac{af+bd}{2ab})^2$ 与原动直线相切.从而有:

结论 3 动直线$(am^2-b)x+cmy+dm^2+em+f=0$(其中 $ab>0$)总与定椭圆(圆)$(x-\dfrac{af-bd}{2ab})^2+\dfrac{1}{4ab}(cy+e)^2=(\dfrac{af+bd}{2ab})^2$ 相切.

结论 3 说明,对于$(am^2-b)x+cmy+dm^2+em+f=0$ 这类动直线,只要 a,b 同号,它就与一定椭圆(圆)相切,例如动直线$(2-3m^2)x+my-m^2+2m-3=0$,根据结论 3,就能得到它与椭圆$(x-\dfrac{7}{12})^2+\dfrac{1}{24}(y+2)^2=\dfrac{121}{144}$相切.

参考文献

1 樊陈卫.记高三的一堂数学复习探究课[J].数学教学,2014,8:7-9

刊号:ISSN 0583-1458 / CN11-2254/O1 全国各地邮局订购 代号:2-501 全年定价:72.00 元 每期定价:6.00 元