

# 数学通报

Shuxue Tongbao

全国初等/中等教育类核心期刊

$\pi$  1988

2015.6

中国数学会·北京师范大学 主办

# 数学通报

(月刊)

(1936年8月创刊)  
刊名题字 郭沫若  
2015年 第54卷 第6期  
(6月30日出版)

主 编 保继光  
副 主 编 胡永建 柳 彬  
编 委 (按汉语拼音为序)  
保继光 代 钦 董 昭  
冯荣权 葛 军 郭要红  
何书元 胡永建 郇中丹  
黄 红 蒋 迅 金宝铮  
李建华 李善良 柳 彬  
任子朝 孙晓天 汤 涛  
王幼宁 杨世明 章建跃  
张思明 张秀平 朱维宗  
编 辑  
郑亚利 魏 炜 赵籍丰

主 管:中国科学技术协会  
主 办:中国数学会  
北京师范大学

编辑出版:《数学通报》编委会、编辑部

地址邮编:北京师范大学(100875)

电话传真:010-58807753

投稿网站:<http://www.shxtb.com>

E-mail:shxtb@bnu.edu.cn

排 版:《数学通报》编辑部

印 刷:河北天普润印刷厂

发 行:北京报刊发行局

订 购:全国各地邮局

代 号:2-501

本期责任编辑 魏 炜

## 目 次

### 本刊专稿

高考文理不分科后数学科考试内容改革研究

..... 任子朝 陈 昂(1)

### 学术前沿

数学教育的边缘:重视跨学科与地域的数学教育

关注弱势群体的数学教育..... 刘 舒 王光明 王兆云(5)

### 特别报道

上海市获得第14届国际数学教育大会举办权..... (11)

### 教学研究

基于“翻转课堂”的教学实践与思考..... 蔡 欣(12)

初高中统计与概率的教学衔接研究

..... 陈建花 沈有建 丁俊然(16)

化解学生立体几何认知困难的几点教学策略..... 袁智斌(19)

浅议“空间向量在立体几何中应用”的教学价值... 李大永(26)

### 教学园地

再谈“解析法”的教学思考..... 姚新国(30)

恰当处设问 课堂更精彩..... 徐进勇(34)

不验,行不行..... 刘爱农(38)

激发学生思维活动的问题教学设计策略..... 姜兴荣(39)

### 解题教学

基于优化学生学习方式的数学解题教学..... 杨月荣(42)

随风潜入“卷” 润“题”细无声..... 仓万林 史 嘉(46)

探究一类动直线的几何性质..... 崔志荣(51)

### 学习园地

圆锥曲线一般方程的参数化问题..... 朱正元(52)

### 初数研究

从数学问题2201的解答中引发的探究..... 张青山(54)

用数学归纳法证明数列不等式得到的启示..... 杨学枝(59)

数学问题解答..... (64)

2248 若  $a, b, c, \lambda$  为非负实数, 求证:

$$(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \geq \frac{3\lambda^2}{4}(a+b+c)^2.$$

(江苏省常熟市中学 查正开 215500)

2249 已知半径为 1 的定圆  $\odot P$  的圆心  $P$  到定直线  $l$  的距离为 2,  $Q$  是  $l$  上一动点,  $\odot Q$  与  $\odot P$  相外切,  $\odot Q$  交  $l$  于  $M, N$  两点, 对于任意直径  $MN$ , 平面上恒有一定点  $A$ , 使得  $\angle MAN$  为定值,

(上接第 51 页)

故设  $\sqrt{(am^2 - b)^2 + (cm)^2} = |am^2 + b|$ ,

则  $c^2 = 4ab > 0$ , 由距离公式

$$h = \frac{|(am^2 - b)x_0 + cm y_0 + dm^2 + em + f|}{|am^2 + b|},$$

$$\text{令 } y_0 = -\frac{e}{c},$$

$$\text{则 } h = \frac{|(ax_0 + d)m^2 + f - bx_0|}{|am^2 + b|},$$

若要使  $h$  为常数, 则有

$$(ax_0 + d)b = a(f - bx_0),$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{af - bd}{2ab}, h = \left| \frac{af + bd}{2ab} \right|,$$

所以, 动直线总与定圆

$$\left(x - \frac{af - bd}{2ab}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{c}\right)^2 = \left(\frac{af + bd}{2ab}\right)^2 \text{ 相切,}$$

猜想成立. 于是有:

**结论 2** 若动直线  $(am^2 - b)x + cm y + dm^2 + em + f = 0$  (其中  $ab > 0$ ) 满足  $c^2 = 4ab$ , 则它总与定圆  $\left(x - \frac{af - bd}{2ab}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{c}\right)^2 = \left(\frac{af + bd}{2ab}\right)^2$  相切.

### 3 结论拓展

回头看问题 2, 动直线  $(m^2 - 1)x + m y + 1 = 0$  中  $a = b = c = 1$ , 不满足  $c^2 = 4ab$ , 但只要把方程改写成  $(m^2 - 1)x + 2m \cdot \frac{y}{2} + 1 = 0$ , 则  $c' = 2$ , 满足  $c'^2 = 4ab$ , 若令  $y' = \frac{y}{2}$ , 则动直线转化为  $(m^2 - 1)x + 2m y' + 1 = 0$ . 由距离公式  $h = \frac{|(m^2 - 1)x_0 + 2m y'_0 + 1|}{1 + m^2}$ , 令  $x_0 = \frac{1}{2}, y'_0 = 0$ , 得  $h = \frac{1}{2}$ , 即动直线与圆  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{4}$  相切, 所以原动直线与椭圆  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4}$  相切.

求  $\angle MAN$  的度数.

(四川省资阳市外国语实验学校 蔡勇全 641300)

2250 已知  $n$  为正整数, 求证:

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots + \sqrt{(n-1) + \sqrt{n}}}}} < 2.$$

(陕西延安育英中学 尚生陈 716000)

上例说明, 若  $c^2 \neq 4ab$ , 可变换得到  $c'^2 = 4ab$  后使用直线与圆相切的距离公式. 如此, 我们再研究更一般性的情况, 若动直线  $(am^2 - b)x + cm y + dm^2 + em + f = 0$  (其中  $ab > 0$ ) 不满足  $c^2 = 4ab$ , 只需考虑  $c' = 2\sqrt{ab}$ , 就可以把动直线的方程就转化为  $(am^2 - b)x + 2\sqrt{ab}m \cdot \frac{cy}{2\sqrt{ab}} + dm^2 + em + f = 0$ , 若令  $y' = \frac{cy}{2\sqrt{ab}}$ , 则方程又转化为  $(am^2 - b)x + 2\sqrt{ab}m y' + dm^2 + em + f = 0$ , 根据结论 2, 变换后的动直线与定圆  $\left(x - \frac{af - bd}{2ab}\right)^2 + \left(y' + \frac{e}{2\sqrt{ab}}\right)^2 = \left(\frac{af + bd}{2ab}\right)^2$  相切, 再将  $y' = \frac{cy}{2\sqrt{ab}}$  代入圆的方程, 就得到定椭圆

$$\left(x - \frac{af - bd}{2ab}\right)^2 + \frac{1}{4ab}(cy + e)^2 = \left(\frac{af + bd}{2ab}\right)^2 \text{ 与原}$$

动直线相切. 从而有:

**结论 3** 动直线  $(am^2 - b)x + cm y + dm^2 + em + f = 0$  (其中  $ab > 0$ ) 总与定椭圆 (圆)  $\left(x - \frac{af - bd}{2ab}\right)^2 + \frac{1}{4ab}(cy + e)^2 = \left(\frac{af + bd}{2ab}\right)^2$  相切.

结论 3 说明, 对于  $(am^2 - b)x + cm y + dm^2 + em + f = 0$  这类动直线, 只要  $a, b$  同号, 它就与一定椭圆 (圆) 相切, 例如动直线  $(2 - 3m^2)x + m y - m^2 + 2m - 3 = 0$ , 根据结论 3, 就能得到它与椭圆  $\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 + \frac{1}{24}(y + 2)^2 = \frac{121}{144}$  相切.

**参考文献**

1 樊陈卫. 记高三的一堂数学复习探究课[J]. 数学教学, 2014, 8: 7-9