



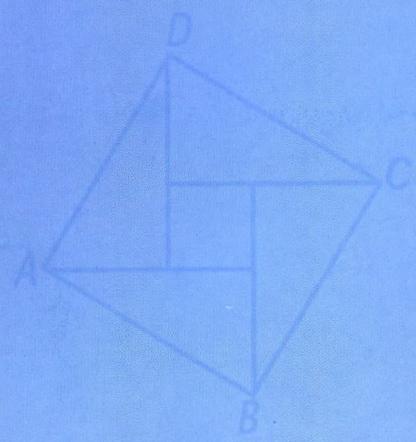
QK1901579

2019.1

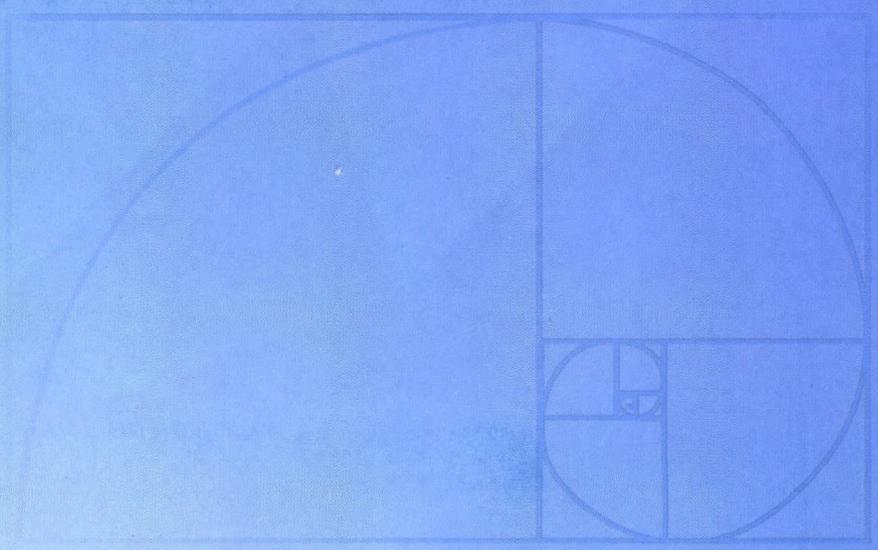
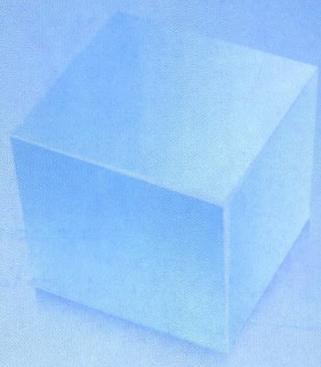
Journal of Mathematics (China)

数学通报

全国初等 / 中等教育类核心期刊



$$e^{\pi i} + 1 = 0$$



中国数学会 · 北京师范大学 主办

数学通报

(月刊)

(1936年8月创刊)

刊名题字 郭沫若

2019年 第58卷 第1期

(1月30日出版)

主 编 保继光
副 主 编 胡永建 柳 彬
编 委 (按汉语拼音为序)
保继光 代 钦 董 昭
冯荣权 葛 军 郭要红
何书元 胡永建 郇中丹
黄 红 蒋 迅 金宝铮
李建华 李善良 柳 彬
任子朝 孙晓天 汤 涛
王幼宁 杨世明 章建跃
张思明 张秀平 朱维宗
编 辑
郑亚利 赵籍丰

主 管:中国科学技术协会

主 办:中国数学会

北京师范大学

编辑出版:《数学通报》编委会、编辑部

通信地址:北京师范大学数学通报编辑部

邮 编:100875

电 话:010—58807753

投稿邮箱:shxtb@bnu.edu.cn

排 版:《数学通报》编辑部

印 刷:河北天普润印刷厂

发 行:北京报刊发行局

订 购:全国各地邮局

代 号:2—501

本期责任编辑 郑亚利

目 次

史海钩沉

傅种孙几何作图思想探析 张彩云 代 钦(1)

教学研究

学会用数学的方式解读内容设计教学 章建跃(8)

合理设计教学过程 发展学生核心素养 石志群(13)

“平面”教学设计的理性突围 胡 浩(16)

教学园地

数学开放性教学的实践与反思 孙红强(19)

让学生重组已有经验研究多边形中的角度求解问题
..... 陈林香(27)

谬误已成觅果因 宋永明 刘 彦(31)

让等腰三角形教学更有几何味 刘东升(33)

解题教学

设计有价值的问题 促进学生自主建构 许兴震(36)

探究促拓展 老题生新花 白雪峰 郭 璋(41)

谈数论学

向量将几何代数化举例 林开亮 刘新亮(44)

读刊随笔

数学问题 2313 号引致的一条不等式链 何 灯(46)

学生习作

一个不等式的推广 张乐千(48)

竞赛园地

第二十二届北京高中数学知识应用竞赛初赛试题及

参考解答 (49)

初数研究

一个三角等式证明及其应用 杨学枝(55)

书 评

数学教学设计要彰显系统的思想 陈汉君(60)

数学问题解答 (63)

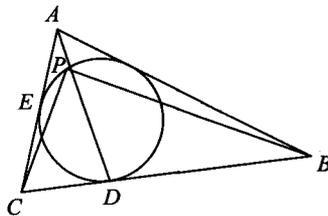
2463 设 $a, b, c > 0$, 求证:

$$abc \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

(陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心 安振平 712000)

2464 $\triangle ABC$ 的内切圆 O 分别与边 BC, CA 相切于 D, E , 连 AD , AD 与圆 O 又交于 P , 连 BP, CP . 求证: $\angle BPC = 90^\circ$ 的充要条件是 $AE + AP = PD$.

(江苏无锡市第一中学 李广修 214031)



2465 设 $x_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则有 $\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n x_k^4$

$$\leq \sum_{k=1}^n x_k^3 \sqrt{n \sum_{k=1}^n x_k^6}.$$

(山东省滨州市北镇中学 宋志敏 256600)

(上接第 59 页)

$$= \frac{b^2 + c^2 - 2h^2 - a'^2}{2\sqrt{b^2 - h^2} \cdot \sqrt{c^2 - h^2}},$$

同理, 有

$$\cos \beta' = \frac{c^2 + a^2 - 2h^2 - b'^2}{2\sqrt{c^2 - h^2} \cdot \sqrt{a^2 - h^2}},$$

$$\cos \gamma' = \frac{a^2 + b^2 - 2h^2 - c'^2}{2\sqrt{a^2 - h^2} \cdot \sqrt{b^2 - h^2}},$$

代入等式

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' - 2\cos \alpha' \cos \beta' \cos \gamma' = 1,$$

(据推论 2) 得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b^2 + c^2 - 2h^2 - a'^2}{2\sqrt{b^2 - h^2} \cdot \sqrt{c^2 - h^2}} \right)^2 + \left(\frac{c^2 + a^2 - 2h^2 - b'^2}{2\sqrt{c^2 - h^2} \cdot \sqrt{a^2 - h^2}} \right)^2 \\ & + \left(\frac{a^2 + b^2 - 2h^2 - c'^2}{2\sqrt{a^2 - h^2} \cdot \sqrt{b^2 - h^2}} \right)^2 \\ & - \frac{(b^2 + c^2 - 2h^2 - a'^2)(c^2 + a^2 - 2h^2 - b'^2)(a^2 + b^2 - 2h^2 - c'^2)}{4(a^2 - h^2)(b^2 - h^2)(c^2 - h^2)} \\ & = 1, \end{aligned}$$

上式经化简, 得到

$$\begin{aligned} & 16\Delta^2 h^2 + a^2 (b^2 + c^2 - a'^2)^2 + \\ & b^2 (c^2 + a^2 - b'^2)^2 + c^2 (a^2 + b^2 - c'^2)^2 \\ & - (b^2 + c^2 - a'^2)(c^2 + a^2 - b'^2)(a^2 + b^2 - c'^2) \\ & - 4a^2 b^2 c^2 = 0, \end{aligned}$$

由此, 可以得到

$$\begin{aligned} h^2 = & \frac{1}{16\Delta^2} [-a^2 (b^2 + c^2 - a'^2)^2 - \\ & b^2 (c^2 + a^2 - b'^2)^2 - c^2 (a^2 + b^2 - c'^2)^2 \\ & + (b^2 + c^2 - a'^2)(c^2 + a^2 - b'^2)(a^2 + b^2 - c'^2)] \end{aligned}$$

$$+ 4a^2 b^2 c^2]$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{16\Delta^2} (-4a^2 b^2 c^2 \cos^2 \alpha - 4a^2 b^2 c^2 \cos^2 \beta \\ & - 4a^2 b^2 c^2 \cos^2 \gamma \\ & + 8a^2 b^2 c^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 4a^2 b^2 c^2), \\ & = \frac{a^2 b^2 c^2}{4\Delta^2} (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma \\ & + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma), \end{aligned}$$

又由四面体的体积公式 $V = \frac{1}{3}\Delta h$, 得到 $h = \frac{3V}{\Delta}$,

代入上式, 得到

$$\left(\frac{3V}{\Delta} \right)^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4\Delta^2} (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma),$$

由此便得到

$$\begin{aligned} V & = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \\ & = \frac{abc}{6} \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 1 & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

许多数学参考书中对于例 4 中的四面体体积公式的证明都比较麻烦, 这里我们给出了一个初等的证明.

本文定理还有许多应用, 限于篇幅就不累赘了.

参考文献

- [1] 沈文选, 杨清桃编著. 几何瑰宝(下)[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2014, 3: 61
[2] 杨学校. 对一个四圆相切问题的解答[J]. 福建中学数学, 2012(8)

ISSN 0583-1458



9 770583 145191

刊号: ISSN 0583-1458
CN11-2254/O1

全国各地邮局订购
代号: 2-501

全年定价: 120.00 元
每期定价: 10.00 元