

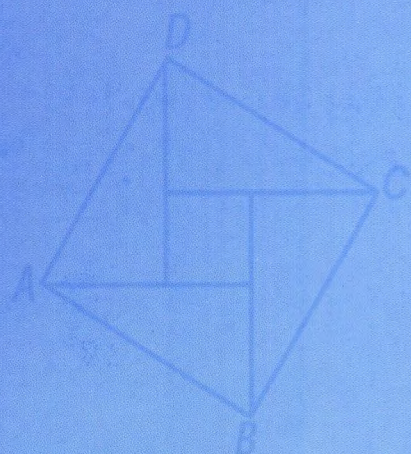


2019.2

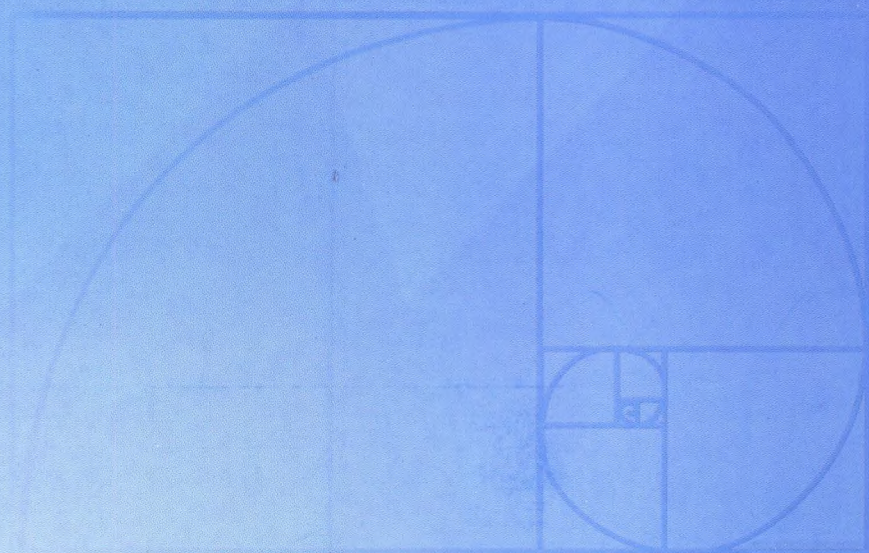
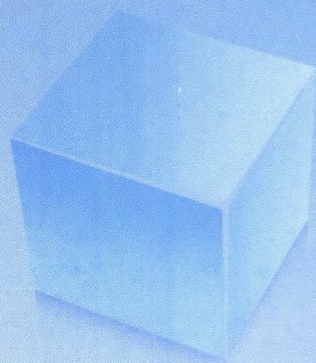
Journal of Mathematics (China)

数学通报

全国初等 / 中等教育类核心期刊



$$e^{\pi i} + 1 = 0$$



中国数学会 · 北京师范大学 主办

数学通报

(月刊)

(1936年8月创刊)
刊名题字 郭沫若
2019年 第58卷 第2期
(2月28日出版)

主 编 保继光
副 主 编 胡永建 柳 彬
编 委 (按汉语拼音为序)
保继光 代 钦 董 昭
冯荣权 葛 军 郭要红
何书元 胡永建 郇中丹
黄 红 蒋 迅 金宝铮
李建华 李善良 柳 彬
任子朝 孙晓天 汤 涛
王幼宁 杨世明 章建跃
张思明 张秀平 朱维宗
编 辑
郑亚利 赵籍丰

主 管:中国科学技术协会
主 办:中国数学会
北京师范大学
编辑出版:《数学通报》编委会、编辑部
通信地址:北京师范大学数学通报编辑部
邮 编:100875
电 话:010—58807753
投稿邮箱:shxtb@bnu.edu.cn
排 版:《数学通报》编辑部
印 刷:河北天普润印刷厂
发 行:北京报刊发行局
订 购:全国各地邮局
代 号:2—501

本期责任编辑 郑亚利

目 次

数学广角

点几何的教育价值 张景中 彭翥成(1)

史海钩沉

正多面体的历史及其现代教育价值 张晓雪 代 钦(5)

《周髀算经》“周公商高问答”相关问题的研究 俞求是(13)

谈学论教

别被理念绑架教学 李 祎(18)

教学研究

数学实验:数学抽象素养形成的有效路径 孙朝仁(21)

基于思维培养的课堂“引导式”提问的若干原则 ... 毛浙东(26)

基于“三个理解”的平面向量单元教学构想 陈志江(30)

中学数学新授课系统设计的实践与解析 伍春兰(34)

教学园地

以“画三角形”实验课为例的“讲中学”的探究 戴 健(39)

潜心重构教材摆脱建构窘境的实践与思考 吕学柱(43)

学生习作

矩阵秩的两种定义 李逸然(47)

解题教学

基于数学问题的课堂教学 黎栋材 闻 岩(48)

2018年北京高考数学理科压轴题剖析

..... 汪燕铭 卢发接(52)

任凭函数多变幻 求导原则不能撼 王芝平(55)

初数研究

一类条件代数不等式统一推广的拾遗

..... 李汝雁 郭要红 孟庆利(58)

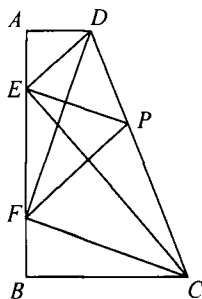
探索任意四边形的余弦定理 田传弟(62)

数学问题解答 (63)

$\left[\left[\frac{a}{c}\right]\right] = \left[\frac{a}{bc}\right]$, 这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(贵州省织金县第六中学 邓波 552100)

2468 设不同的两点 E, F 在梯形 $ABCD$ 的腰 AB 上, 且满足 $\angle CED = \angle CFD = \angle ABC = 90^\circ$, 在另一腰 CD 上求点 P , 使得 $AB \leq PE + PF \leq CD$.



(河南辉县一中 贺基军 453600)

(上接第 63 页)

当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 即是一组对角互余的特例, $\cos 90^\circ = 0$, 因此结论是 $AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2$;

当 $\alpha = 180^\circ$ 时, $\cos 180^\circ = -1$, 所以 $AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$,

所以 $(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD + AD \cdot BC)^2$, 即 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, 这个特例便是赫赫有名的托勒密定理.

上述结论是在凸四边形中研究和证明的, 研究发现, 它在凹四边形情形仍然成立.

如图 5, 在凹四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD +$ 优角 $\angle BCD = \alpha$, AC, BD 为对角线. 试证明 $AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos \alpha$.

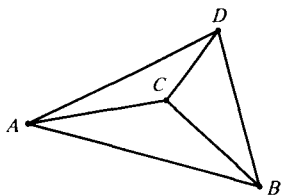


图 5

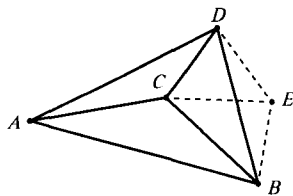


图 6

证明 如图 6, 在 $\angle BCD$ 内作 CE , 使 $\angle BCE = \angle BAD$, 作 $\angle CBE = \angle ABD$, 所以 $\triangle ABD \sim \triangle CBE$, 所以 $\frac{BD}{BE} = \frac{AD}{CE} = \frac{AB}{CB}$, 所以 $CE =$

2469 在 $\triangle ABC$ 中, 设三边 a, b, c 上对应的高、角平分线、中线、旁切圆半径分别为 $h_a, h_b, h_c; t_a, t_b, t_c; m_a, m_b, m_c; r_a, r_b, r_c$, $\sum$ 表示循环和, 求证:

$$\sum \frac{1}{m_a^2} \leq \sum \frac{1}{r_a r_b} \leq \sum \frac{1}{t_a^2} \leq \sum \frac{1}{h_a h_b} \leq \sum \frac{1}{h_a^2} \leq \sum \frac{1}{r_a^2}. \quad (1)$$

(河南质量工程职业学院 李永利 467001)

2470 计算 $\frac{\tan 21^\circ \tan 27^\circ}{\tan 3^\circ}$ 的值.

(安徽省岳西县汤池中学 杨续亮 246620)

$\frac{AD \cdot BC}{AB}, \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{CB}$, 又 $\angle ABC = \angle DBE$, 所以

$\triangle ABC \sim \triangle DBE$, 所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{BD}$,

所以 $DE = \frac{AC \cdot BD}{AB}$.

因为 $\angle BAD +$ 优角 $\angle BCD = \alpha$, 所以

$$\begin{aligned} \angle DCE &= 360^\circ - (\text{优角} \angle BCD + \angle BCE) \\ &= 360^\circ - (\text{优角} \angle BCD + \angle BAD) \\ &= 360^\circ - \alpha, \end{aligned}$$

在 $\triangle DCE$ 中, 根据余弦定理,

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CD \cdot CE \cos \angle DCE,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{AC \cdot BD}{AB}\right)^2 = CD^2 + \left(\frac{AD \cdot BC}{AB}\right)^2 - 2CD \cdot$$

$$\frac{AD \cdot BC}{AB} \cos \alpha,$$

$$\text{所以 } AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos \alpha.$$

综上所述, 得到结论:

在任意四边形 $ABCD$ 中, 若一组对角之和为 α , AC, BD 为对角线, 则

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos \alpha.$$

一个如此优美的结论必须给它一个贴切的名字——四边形的余弦定理.

参考文献

[1] 杨平. 对角互余四边形的一个性质[J]. 中学数学教学, 2000 (2): 40

ISSN 0583-1458



刊号: ISSN 0583-1458
CN11-2254/O1

全国各地邮局订购
代号: 2-501

全年定价: 120.00 元
每期定价: 10.00 元