



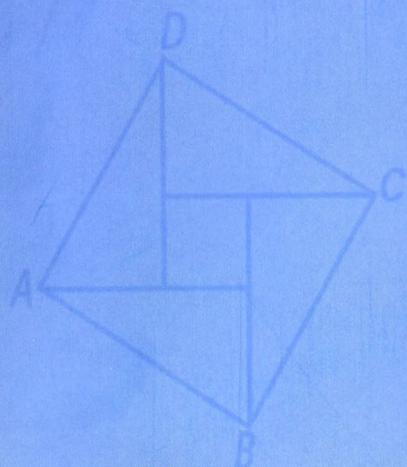
QK2150494

2021.11

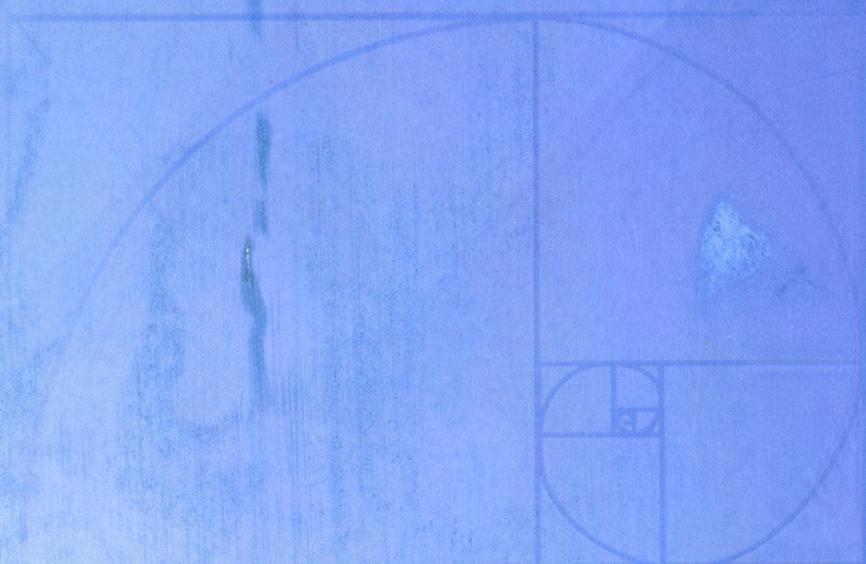
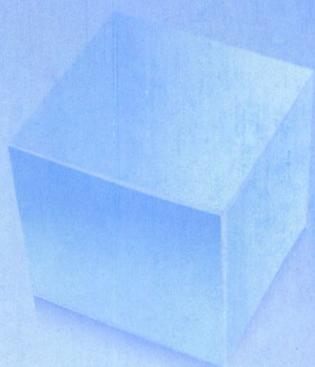
Journal of Mathematics (China)

# 数学通报

全国初等 / 中等教育类核心期刊



$$e^{\pi i} + 1 = 0$$



中国数学会 · 北京师范大学 主办

# 数学通报

(月刊)

(1936年8月创刊)

刊名题字 郭沫若

2021年 第60卷 第11期

(11月30日出版)

主 编 保继光  
副 主 编 胡永建 柳 彬  
编 委 (按汉语拼音为序)  
保继光 代 钦 董 昭  
冯荣权 葛 军 郭要红  
何书元 胡永建 郇中丹  
黄 红 蒋 迅 金宝铮  
李建华 李善良 柳 彬  
任子朝 孙晓天 汤 涛  
王幼宁 杨世明 章建跃  
张思明 张秀平 朱维宗  
编 辑  
郑亚利 赵籍丰

主 管:中国科学技术协会

主 办:中国数学会

北京师范大学

编辑出版:《数学通报》编委会、编辑部

通信地址:北京师范大学数学通报编辑部

邮 编:100875

电 话:010—58807753

投稿邮箱:shxtb@bnu.edu.cn

排 版:《数学通报》编辑部

印 刷:河北天普润印刷厂

发 行:北京报刊发行局

订 购:全国各地邮局

代 号:2—501

本期责任编辑 郑亚利

## 目 次

### 本刊专稿

核心素养指向的数学教学目标设计 ..... 喻 平(1)

### 新课标新课程新教学

通过计数原理感悟运算真谛 利用排列组合提升思维品质 .....  
..... 章建跃(6)

### 数学教育

数学教育对比实验:软件操作、结果显示及数据解读 .....  
..... 胡典顺(14)

### 教学研究

初中代数学习中发展学生推理能力的着力点分析与建议 .....  
..... 江守福 章 飞 顾继玲(21)

思直观之源 展想象之翼 ..... 祝敏芝(25)

基于“问题提出”的数学新定义型综合题教学 .....  
..... 顿继安 蔡明艳(30)

发问·发现·发省·发展 ..... 段志贵 王光明 张建伟(35)

### 评价与考试

近十年高考立体几何试题直观想象素养考查研究:表现及趋势  
..... 葛丽婷 郭玉峰 郎春雨(41)

### 教学园地

古今碰撞 迈好证明“第一步” .....  
..... 姜鸿雁 秦语真 孙丹丹(50)

实施微探究教学 把问题教学落实于课堂 ..... 孙西洋(55)

### 初数研究

通过  $l \times m \times n$  的格点阵中至少两点的直线条数的探究 .....  
..... 姚 璐 李 洋(59)

### 读刊随笔

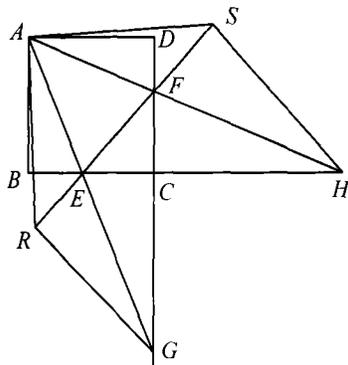
数学通报上两个几何不等式的新隔离式 .....  
..... 钟建新 谢 虹(61)

数学问题解答 ..... (63)

**2635** 如图,正方形  $ABCD$  中, $E,F$  分别在边  $BC,CD$  上, $AE,AF$  的延长线分别与  $DC,BC$  的延长线交于  $G,H,GR \perp EF$  于  $R,HS \perp EF$  于  $S$ ,连接  $AR,AS$ .  $\angle RAS = 90^\circ, \triangle ARS$  的面积等于正方形  $ABCD$  的面积.则  $\angle EAF = 45^\circ$ .

(江苏省无锡市硕放中学 邹黎明

214142)



(上接第 62 页)

$$\begin{aligned} \sum \frac{m_a^2}{bc} &= \frac{m_a^2}{bc} + \frac{m_b^2}{ca} + \frac{m_c^2}{ab} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4bc} + \\ &\quad \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4ca} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4ab} + \\ &= \frac{2b^2 + 2c^2}{4bc} - \frac{a^2}{4bc} + \frac{2c^2 + 2a^2}{4ca} - \frac{b^2}{4ca} + \\ &\quad \frac{2a^2 + 2b^2}{4ab} - \frac{c^2}{4ab} \\ &= -\frac{3}{4} \left( \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right) + \frac{2a^2}{4bc} + \frac{2b^2}{4ca} + \\ &\quad \frac{2c^2}{4ab} + \frac{2b^2 + 2c^2}{4bc} + \frac{2c^2 + 2a^2}{4ca} + \frac{2a^2 + 2b^2}{4ab} \\ &= -\frac{3}{4} \sum \frac{a^2}{bc} + \frac{1}{2} (\sum a^2) \sum \frac{1}{bc} \\ &= \frac{1}{abc} \left( -\frac{3}{4} \sum a^3 + p \sum a^2 \right), \end{aligned}$$

据熟知的不等式  $\sum a^3 = 2p(p^2 - 6Rr - 3r^2)$

和  $\sum a^2 = 2(p^2 - 4Rr - r^2)$ ,

$$\text{则 } \sum \frac{m_a^2}{bc} = \frac{p^2 + 2Rr + 5r^2}{8Rr},$$

结合 Gerretsen 不等式

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$

$$\text{得 } \frac{9}{4} \leq \sum \frac{m_a^2}{bc} \leq \frac{R}{2r} + \frac{r}{R} + \frac{3}{4}.$$

$$\text{因为 } \frac{2R}{r} - \frac{3r}{2R} - 1$$

$$= \frac{R}{2r} + \frac{r}{R} + \frac{3}{4} + \left( \frac{R}{r} - 2 \right) \left( \frac{5r}{4R} + \frac{3}{2} \right)$$

$$\geq \frac{R}{2r} + \frac{r}{R} + \frac{3}{4},$$

$$\text{则 } \sum \frac{m_a^2}{bc} \leq \sum \frac{r_a^2}{bc}.$$

根据三角形面积公式得

$$\begin{aligned} \sum \frac{h_a^2}{bc} &= \frac{4S^2}{bca^2} + \frac{4S^2}{cab^2} + \frac{4S^2}{abc^2} \\ &= \frac{4S^2}{a^2b^2c^2} (bc + ca + ab), \end{aligned}$$

据熟知的不等式

$$\sum bc = p^2 + 4Rr + r^2, S = \frac{abc}{4R} = pr,$$

$$\text{则 } \sum \frac{h_a^2}{bc} = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2},$$

由 Gerretsen 不等式  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ ,

$$\text{得 } \sum \frac{h_a^2}{bc} \geq \frac{5Rr - r^2}{R^2}.$$

由欧拉不等式  $2r \leq R$ , 得  $2r^2 \leq Rr$ ,

从而有  $9Rr \leq 10Rr - 2r^2$ .

$$\text{得 } \frac{9r}{2R} \leq \frac{5Rr - r^2}{R^2},$$

从而得到另一个新隔离式

$$\frac{9r}{2R} \leq \frac{5Rr - r^2}{R^2} \leq \sum \frac{h_a^2}{bc} \leq \sum \frac{t_a^2}{bc} \leq \frac{9}{4}$$

$$\leq \sum \frac{m_a^2}{bc} \leq \sum \frac{r_a^2}{bc} \leq \frac{8R^2 - 14Rr + 5r^2}{2Rr}.$$

可以看出定理 2 就是对 2375 号问题结论  $\frac{9r}{2R} \leq$

$\sum \frac{t_a^2}{bc} \leq \frac{9}{4}$  的新隔离.

参考文献

[1] 李永利. 数学问题解答 2333 号[J]. 数学通报. 2016(11)

[2] 李永利. 数学问题解答 2375 号[J]. 数学通报. 2017(7)

ISSN 0583-1458



刊号: ISSN 0583-1458  
CN11-2254/O1

全国各地邮局订购  
代号: 2-501

全年定价: 120.00 元  
每期定价: 10.00 元