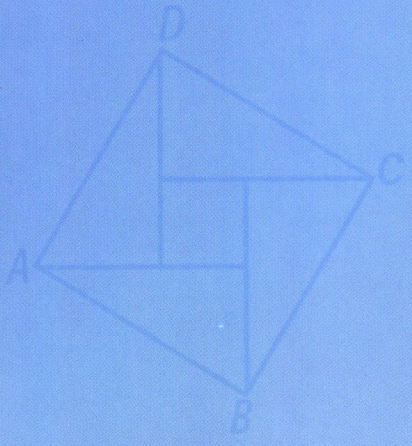
2021.7

Journal of Mathematics (China)

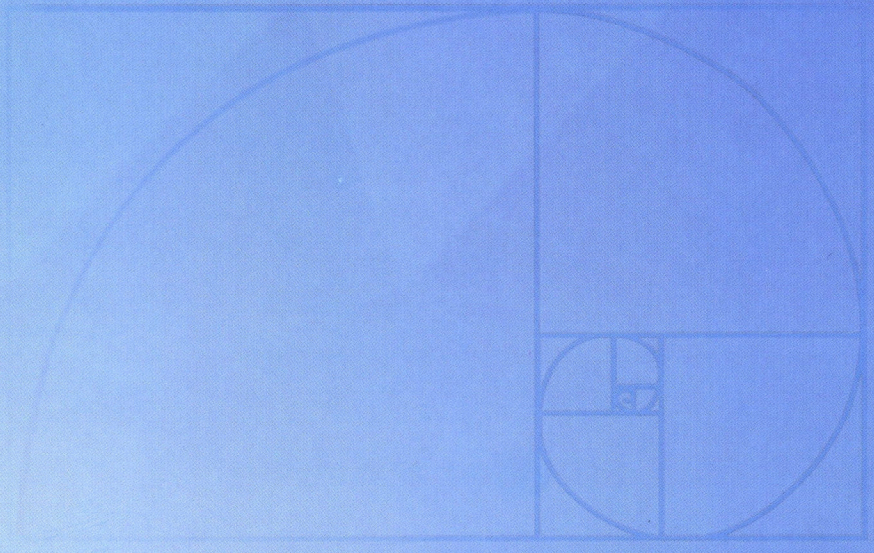
数学通报

全国初等/中等教育类核心期刊

QK2131544



$e^{\pi i}+1=0$



中国数学会 · 北京师范大学 主办

万方数据

数学通报(月刊)

(1936年8月创刊)
刊名题字　郭沫若
2021年　第60卷　第7期
(7月30日出版)

主　　编　保继光
副 主 编　胡永建　　柳　彬
编　　委　(按汉语拼音为序)
保继光　　代　钦　　董　昭
冯荣权　　葛　军　　郭要红
何书元　　胡永建　　郇中丹
黄　红　　蒋　迅　　金宝铮
李建华　　李善良　　柳　彬
任子朝　　孙晓天　　汤　涛
王幼宁　　杨世明　　章建跃
张思明　　张秀平　　朱维宗
编　辑
郑亚利　　赵籍丰

主　　管:中国科学技术协会
主　　办:中国数学会
　　北京师范大学
编辑出版:《数学通报》编委会、编辑部
通信地址:北京师范大学数学通报编辑部
邮　　编:100875
电　　话:010－58807753
投稿邮箱:shxtb@bnu.edu.cn
排　　版:《数学通报》编辑部
印　　刷:河北天普润印刷厂
发　　行:北京报刊发行局
订　　购:全国各地邮局
代　　号:2—501

本期责任编辑　郑亚利

目　　次

本刊专稿

鸡兔同笼之白话矩阵版 …… 李尚志(1)

新课标新课程新教学

利用几何图形建立直观通过代数运算刻画规律——解析几何内容分析与教学　思考(之一) …… 章建跃(7)

数学教育

是理解取向还是研究取向 …… 徐章韬　汪晓勤(15)

教学研究

回归分析的内涵与教学探究 …… 汤向明　金　蛟(18)

大概念视角下的初中数学单元整体教学设计 …… 斯海霞　叶立军(23)

对平面向量教学的深度思考 …… 于道洋　宁连华(29)

初中数学单元复习课教学设计的特征分析 …… 顾继玲　章　飞(31)

评价与考试

高考开放题命制的理论和技术研究 …… 任子朝　赵　轩　翟嘉祺　徐奉先(37)

教学园地

基于数学抽象的“函数性质”单元教学设计 …… 罗德建　刘春艳(42)

结构化单元教学在初中数学教学中的实践 …… 陈　艳　徐明悦(47)

新授课“四问驱动”教学范式的构建与实践 …… 王克亮(51)

解题教学

对解题教学中数学直觉的价值及培养途径的思考 …… 杨元韡　耿晓华(56)

学习园地

行列式定义的相关注解 …… 王子晗　黎　雄(60)

数学问题解答 …… (63)

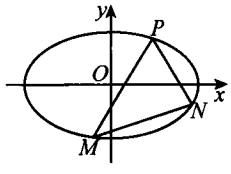
万方数据

2613 已知 $a,b>0,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,

求证:$3ab+\frac{4}{a+b}\leqslant 5+a^2+b^2$.

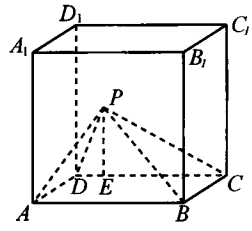
(四川省成都华西中学　张云华　610051)

2614 在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 P 在椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上,过点 P 作斜率分别为 $\frac{a}{b},-\frac{a}{b}$ 的直线,交椭圆 Γ 于异于点 P 的点 M,N. 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.



(江苏省徐州市第一中学　张培强　221140)

2615 如图,长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=AA_1=2,BC=1$. P 为侧面 CC_1D_1D 内(含边界)的动点,AP,BP 与平面 CC_1D_1D 所成的角分别为 α,β,且 $\cot\alpha+\cot\beta=2\sqrt{2}$,求三棱锥 $B-APD$ 体积 V 的取值范围.



(河南省方城县教研室　邵明宪　473200)

(上接第 6 页)等于两项实数之和,等于和角余弦.

竖直方向两段之和 $\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DT}=(\cos\beta\sin\alpha+\mathrm{i}\sin\beta\cos\alpha)\mathrm{i}=\sin(\alpha+\beta)\mathrm{i}$ 是两项虚数. 虚部系数等于和角正弦.

即使不用复数,也可以从 B 作垂线 $BK\perp OE$ 得垂足 K,得到 $\cos(\alpha+\beta)=OK$,$\sin(\alpha+\beta)=KB$. 从 B 作垂线 $BD\perp OA$ 得垂足 D,从 D 作 $DH\perp OE$ 得垂足 H,从 B 作 $BT\perp DH$ 得垂足 T. 同样得到 OH,HD,DT,TB 这些线段,并且算出它们的长度:

由 $OD=\cos\beta$ 得到 $OH=OD\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha$,$HD=OD\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha$.

由 $\angle TDB=180^\circ-\angle ODB-\angle ODH=90^\circ-\angle ODH=\alpha$ 及 $DB=\sin\beta$ 得到

$DT=DB\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$,$TB=DB\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha$. 于是得到

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=KB=HD+DT\\&=\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha,\\\cos(\alpha+\beta)&=OK=OH-TB\\&=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha.\end{aligned}$$

这就是在引入向量之前高中数学课本对于和角公式采用的纯粹几何方法的证明. 但是我们看到,用复数乘法得出的证明实质上与它相同. 这两个证明都是独立的证明,但它们实质上相同. 纯几何证明作了很多辅助线,尤其是很多垂线. 复数证明为什么不需要作垂线? 关于垂线的几何性质,它都用表示旋转 90°的虚数 i 的运算代替了. 复数证明貌似没有用到几何定理,其实是将一些基本的几何定理化身为运算律用进去了. 为了将旋转看成数参加运算,我们利用几何定理证明了它满足分配律和交换律. 表示旋转的数大部分是虚数,需要将几何定理化身为运算律. 实数乘坐标满足分配律也用了相似三角形的几何定理.

棣美弗公式　σ_α^n 是将旋转 α 的动作重复执行 n 次,总效果是旋转角 $n\alpha$. 因此

$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=\sigma_\alpha^n=\sigma_{n\alpha}=\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha$(棣美弗公式).

这个结论不需要用到和角公式. 将左边用牛顿二项式定理展开,就得到 n 倍角公式.

ISSN 0583-1458

刊号:ISSN 0583－1458 / CN11－2254/O1　全国各地邮局订购　代号:2－501　全年定价:120.00 元　每期定价:10.00 元

万方数据