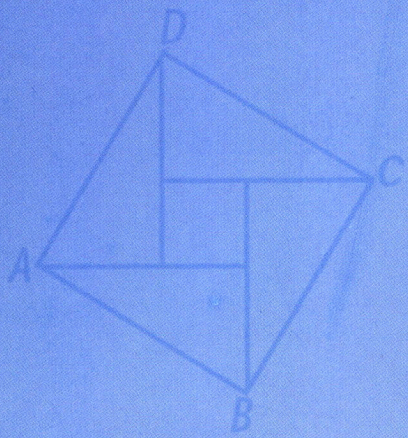
2022.10

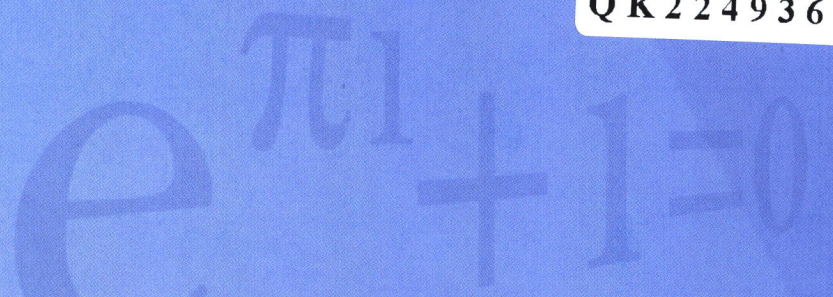
Journal of Mathematics (China)

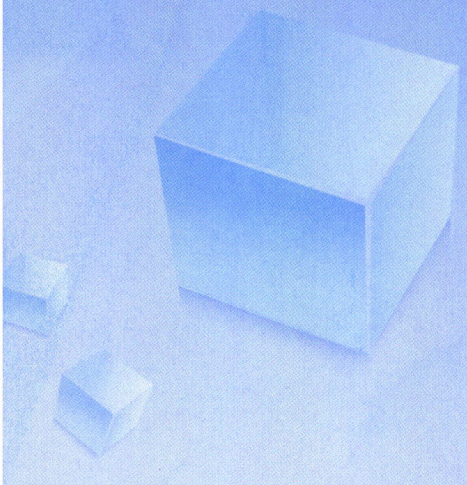
数学通报

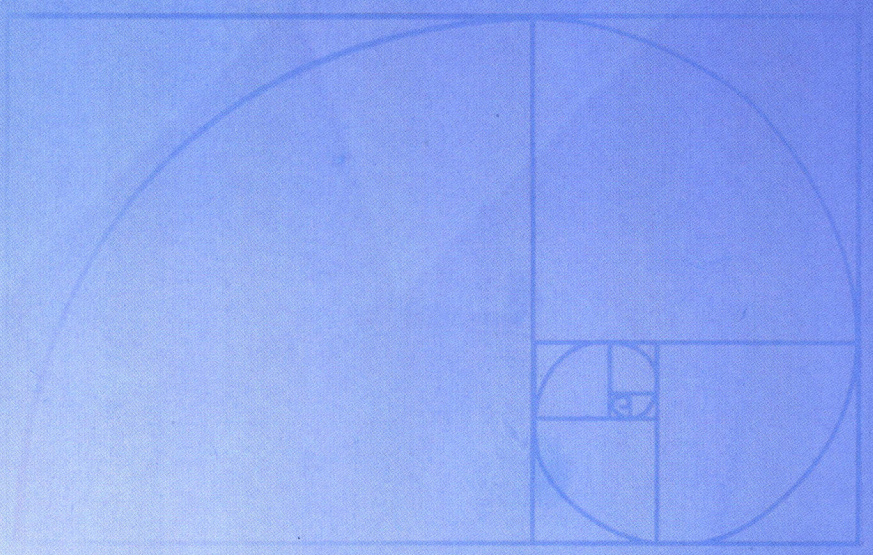
全国初等/中等教育类核心期刊

QK2249368









中国数学会 · 北京师范大学 主办

万方数据

数学通报(月刊)

(1936年8月创刊)
刊名题字　郭沫若
2022年　第61卷　第10期
(10月30日出版)

主　　编　保继光
副 主 编　胡永建　　柳　彬
编　　委　(按汉语拼音为序)
保继光　　代　钦　　董　昭
冯荣权　　葛　军　　郭要红
郭玉峰　　胡永建　　郇中丹
黄　红　　蒋　迅　　金宝铮
李建华　　李善良　　柳　彬
任子朝　　孙晓天　　苏效乐
汤　涛　　王幼宁　　杨世明
章建跃　　张思明　　张秀平
赵　亮　　朱维宗　　朱一心
编　辑
郑亚利　　赵籍丰

主　　管:中国科学技术协会
主　　办:中国数学会
　　北京师范大学
编辑出版:《数学通报》编委会、编辑部
通信地址:北京师范大学数学通报编辑部
邮　　编:100875
电　　话:010—58807753
投稿邮箱:shxtb@bnu.edu.cn
排　　版:《数学通报》编辑部
印　　刷:保定市海天印务有限公司
发　　行:北京报刊发行局
订　　购:全国各地邮局
代　　号:2—501

本期责任编辑　郑亚利

目　　次

本刊专稿

高考借题发挥(Ⅲ)——椭圆变圆 …… 李尚志(1)

数学教育

数学核心素养的研究路径：示例及误区 …… 郭玉峰(4)

教学研究

综合与实践活动中的问题提出教学探索 ……
…… 安志军　侯洋洋　胡耀东　赵晓燕(12)

数学单元教学内容分析框架 … 吴立宝　刘琦琦　巩雅楠(16)

整体观视角下高中数学教学的建构与思考 …… 罗建宇(20)

为学生铺设合乎逻辑的思维阶梯 …… 李昌官(25)

一般观念统领下的“初小衔接”要衔接什么、如何衔接
…… 王红权(29)

评价与考试

PISA测评理念下的学业考试试题命制研究…… 杨一丽(35)

教学园地

借助数学模型 培养关键能力 …… 潘竹树　李　祎(39)

新定义重在理解 新研究彰显能力 …… 沈吉儿　郑　瑄(44)

解题教学

聚焦数学核心素养 引导立体几何教学 ……
…… 刘　熙　刘冰楠(51)

读刊随笔

一个不等式的再推广 …… 张道祥　杨海东　周　文(58)

学习园地

空间等距变换及其矩阵表示 …… 胡永建　周　蓓(60)

数学问题解答 …… (63)

万方数据

2690 设函数 $f(x)=\left[\frac{x}{8}\right]$，$F(x)=x-8f(x)$，其中 $[X]$ 表示不大于 X 的最大整数. 如果自然数 n 满足不等式 $F(f(n))\cdot F(f(f(n)))\geqslant 40\geqslant\sqrt{2n}$，求 n 的最小值和最大值.

（河南辉县一中　贺基军　453600）

（上接第 62 页）

即 $Ae=e$. 当 $|A|=-1$ 时，$-A$ 也是正交矩阵且 $|-A|=1$. 由前面的结论知，存在单位向量 $e\in\mathbb{R}^3$ 使得 $(-A)e=e$，即 $Ae=-e$.

对于空间正交变换 σ，由命题 9 知，存在单位向量 $e'_1\in\mathbb{R}^3$，使得 $\sigma(e'_1)=Ae'_1=\pm e'_1$. 在过原点且以 e'_1 为法向量的平面内，我们选取两个彼此正交的单位向量 e'_2,e'_3，使得 e'_1,e'_2,e'_3 构成右手系. 此时，e'_1,e'_2,e'_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基向量. 设

$$\sigma(e'_1)=b_{11}e'_1+b_{21}e'_2+b_{31}e'_3,$$
$$\sigma(e'_2)=b_{12}e'_1+b_{22}e'_2+b_{32}e'_3,$$
$$\sigma(e'_3)=b_{13}e'_1+b_{23}e'_2+b_{33}e'_3,$$

其中 $b_{ij}\in\mathbb{R}$，$i,j=1,2,3$. 显然，$b_{11}=\pm1$，$b_{21}=b_{31}=0$. 由于 σ 为空间正交变换，故 $\sigma(e'_1),\sigma(e'_2),\sigma(e'_3)$ 为彼此正交的单位向量. 类似可证：$B=(b_{ij})_{i,j=1}^3$ 是三阶正交矩阵，即 $B^{\mathrm{T}}B=BB^{\mathrm{T}}=I_3$. 由此可得，

$$B=\begin{pmatrix}\pm1 & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & b_{23}\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix},$$

其中

$$B'=\begin{pmatrix}b_{22} & b_{23}\\ b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$$

为二阶正交矩阵. 注意到，$\sigma(e'_2)=b_{22}e'_2+b_{32}e'_3$，$\sigma(e'_3)=b_{23}e'_2+b_{33}e'_3$. 则 σ 为 e'_2,e'_3 所在的过原点的平面上的等距变换，且满足 $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 因此，$\sigma$ 为该平面上的旋转变换或关于该平面内过原点的某条直线的反射变换，从而总可选取适当的 e'_2,e'_3，使得

$$B'=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\text{或}B'=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

于是，B 具有如下四种形式之一：

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\qquad(5)$$

如果建立空间直角坐标系 $O\text{-}x'y'z'$，使得 e'_1,e'_2,e'_3 分别为与 x' 轴，y' 轴，z' 轴正向同向的单位向量，则 B 为空间正交变换 σ 关于基向量组 e'_1,e'_2,e'_3 的矩阵. 那么，(5)式中 B 的前三种情形分别对应着 σ 是绕 x' 轴的空间旋转变换、关于 $x'Oz'$ 面的镜面反射变换与绕 z' 轴的空间旋转变换. 再由推论 8 知，B 的第四种形式对应着 σ 为一个空间旋转变换（旋转轴为 x' 轴）与一个镜面反射变换（反射平面为 $y'Oz'$ 面）的乘积.

综上所述，空间正交变换可以分为以下三类：

(1)空间旋转变换；

(2)镜面反射变换；

(3)空间旋转变换与镜面反射变换的乘积.

结合性质 4，我们立即得出：空间旋转变换、镜面反射变换与空间平移变换是空间等距变换的基本构成元素，每一个空间等距变换总可表示成若干个这三种空间等距变换的乘积形式.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京：人民教育出版社，2020

[2]胡永建，周蓓. 平面等距变换及其矩阵表示[J]. 数学通报，2022，61(3)：50－53

[3]张英伯，王恺顺. 代数学基础(上册)[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012

[4]张禾瑞. 近世代数基础(1978 年修订版)[M]. 北京：人民教育出版社，1978

ISSN 0583-1458

刊号：ISSN 0583－1458 / CN11－2254/O1

全国各地邮局订购　代号：2－501

全年定价：120.00 元　每期定价：10.00 元

万方数据