

全国优秀科技期刊
中国期刊方阵双效期刊

ISSN 1002-4123
CN 34-1070/O1

中学数学教学

ZHONGXUE SHUXUE JIAOXUE

4
2015



合肥师范学院
安徽师范大学
安徽省数学学会

万方数据

中学数学教育

(双月刊)

1978年创刊(总第214期)

2015年第4期

2015年8月15日出版

主 管:安徽省教育厅
主 办:合肥师范学院
安徽师范大学
安徽省数学学会

名誉主编:苏 淳
主 编:杨世国
常务副主编:张新全

本期责任编辑:张新全

目 次

聚焦新课程

- 中学数学教学目标编制和内容重组能力构成要素初探
..... 江玉军(1)
- 文理不分科后完善高中数学课程和教材的思考 林保平(5)
- “正弦函数的性质”的教学应该教什么 董海涛(9)
- 初中数学综合实践课教学设计及建议
——以《三角形首饰盒》为例 王鹏宇 张 玲(11)

教学参考

- 文化数学:一片正在开发的沃土
——初谈“文化数学学习单”的实践研究 史 嘉(14)
- 对2015年浙江省高考数列压轴题放缩策略的思维探析
..... 林国夫(18)
- 解题中“思维跳高”现象的成因及缓解策略 秦 伟(21)
- 何为最值 谢小俊(24)
- 论数学思想方法与题型教学孰轻孰重 杨婷婷(25)
- 都是“命题”惹的祸 彭向阳(27)
- 一花一世界
——再评2014年高考数学安徽卷(理)第20题 ... 张 硕(28)
- 有心圆锥曲线一个性质的新发现 李永生(31)
- 向量新定义题解法探析 郑 琼(32)

解题方法

- 追寻学生思维的脚步 为题目量身定制解法 王永生(34)
- 活用特殊三角形 速解三角形考题 刘才华(39)
- 滴水见彩虹 小题亦精彩
——对2015年重庆市高考数学文科14题的探究 李 波(40)
- 椭圆的两类内接三角形面积的最大值 胡彦然 黄晓庆(42)
- 一道2015年高考试题的推广及拓展 黄旭东(43)
- 巧用极限思想探究函数图象的走向 武增明(45)
- 趣谈一元二次不等式(组)问题的求解策略 吴冬梅 张 震(48)

复习考试

- 体现特色 平稳过渡
——2015年安徽省高考数学试题评析与教学启示 ... 夏怀东(51)
- 中考压轴题该压在哪儿?
——对2014年上海市中考数学第25题的分析与反思
..... 刘华为(54)
- 2015年三道同源高考试题的探究 陈崇荣 杨苍洲(56)

初数研究

- 第9个优美不等式的证明 何 灯 李云杰(58)
- 三维单形的Cayley-Menger行列式的应用 梅灵捷(59)
- 一个优美不等式的简证及推广 董永春 邓喜成(62)

数学园地

- 墓碑上飘逸着数学的芳香 张安军(64)
- 错在哪里 雷亚庆 查正开(封三)

2 江苏省常熟市中学

查正开 (邮编:215500)

暑期在对 2015 高考试题的研究交流中,有位老师给出山东理科压轴题试题的一种创新解法,现提出来与读者一起研究.

题目 (2015 年高考山东理科第 21 题(2)) 设函数 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 若 $\forall x > 0, f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

错解 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x) \geq 0 \Rightarrow a(x - x^2) \leq \ln(x+1) (\forall x > 0)$ (1)

①当 $x = 1$ 时, 不等式(1)显然成立.

②当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $a \geq \frac{\ln(x+1)}{x-x^2}$ (2)

③当 $x \in (0, 1)$ 时, $a \leq \frac{\ln(x+1)}{x-x^2}$ (3)

考察函数 $h(x) = \ln(x+1) - (x - x^2) = \ln(x+1) - x + x^2 (x > 0)$.

$h'(x) = \frac{x(2x+1)}{x+1} > 0$, 所以 $h(x)$ 在

$(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因此, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) > h(1) = \ln 2 > 0$, 得 $\frac{\ln(x+1)}{x-x^2} < 1$, 故要使得不等式(2)

恒成立, 则 $a \geq 1$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 得 $\frac{\ln(x+1)}{x-x^2} > 1$, 故要使得不等式

(3)恒成立, 则 $a \leq 1$. 综上得 $a = 1$.

解答错了! 错在哪里?

错因分析 值得注意的是第一种解法中, 采用分类讨论来实现分离变量, 这是处理恒成立问题的常用手段. 在直接利用原函数(商函数)困难时, 通过构造新函数(差函数)来过度, 应该是一种比较好的思想方法, 其过程与运算也没有问题, 但为什么会产生错误的结果, 问题到底出在哪里? 实际上, 采用变量(参数)分离来处理恒成立问题时, 要求出函数的下确界, 要用到极限的知

识, 而这是高等数学的内容, 学生不知道, 教师一般也不怎么重视和研究, 因此在函数的最值存在时不会有问题, 但当最值不存在时, 就会产生错误了. 事实上, 如果注意到这一点, 采用第一种解法的思路也是能得到正确结果的.

正解 由题设得

$$f'(x) = \frac{2ax^2 + ax + 1 - a}{x+1} (x > 0).$$

设 $g(t) = \ln t - t + 1 (t > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1-t}{t} (t > 0)$, 由此可知

$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 从而可得 $g(t)_{\max} = g(1) = 0$.

于是有不等式 $\ln t \leq t - 1$ 成立. 则令 $t = x + 1$, 可得 $\ln(x+1) \leq x$.

令 $t = \frac{1}{x+1}$, 可得 $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$.

①当 $a > 1$ 时, $f'(0) = 1 - a < 0$, 故当 $x \in (0, \frac{-a + \sqrt{9a^2 - 8a}}{4a})$ 时 $f'(x) < 0$, 则

$f(x)$ 在 $(0, \frac{-a + \sqrt{9a^2 - 8a}}{4a})$ 上单调递减, 因此, $f(x) < f(0) = 0$ 与题意不符;

②当 $a < 0$ 时, 由不等式 $\ln(x+1) \leq x$ 得: 当 $x > 1 - \frac{1}{a}$ 时,

$f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x) \leq x + a(x^2 - x) < 0$, 也与题意不符;

③当 $0 \leq a \leq 1$ 时, 则 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq \ln(x+1) > 0$;

$0 < x < 1$ 时, 由不等式 $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$

得: $f(x) \geq \frac{x}{x+1} + (x^2 - x) = \frac{x^3}{x+1} > 0$,

即当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $f(x) > 0$ 符合题意.

综合①②③得, 所求取值范围是 $a \in [0, 1]$.

本刊已入网“万方数据—数字化期刊群”、“中国知网”和“维普资讯网”, 全文资料已入网, 若有异议,

请在来稿中注明或向我刊编辑部咨询.

编辑出版 《中学数学教学》编辑部

地址 合肥市莲花路 1688 号合肥师范学院

邮编 230601 电话 0551-62836265

E-mail zsjxhf@sina.com

印刷 合肥共达印刷厂

总发行 安徽省邮政报刊发行局

发行范围 国内外公开发刊

ISSN 1002-4123



订 阅 全国各地邮局

邮 订 代 号 26-7

本 刊 网 址 <http://zxsxjx.hfnu.edu.cn>